

Cap. 4. Quantização da luz

Neste capítulo vamos descobrir a primeira evidência clara do fracasso da física clássica em explicar fenômenos microscópicos, a evidência de que a radiação EM é quantizada.

Dizemos que algo é quantizado se só pode existir em quantidades discretas - é o oposto de contínuo. Em nossa vida diária, ovos são quantizados, mas gasolina não é. No nível microscópico, vimos que a matéria é quantizada: sua menor unidade, ou quantum, é o átomo. A carga elétrica é também quantizada, e o quantum de carga é $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$.

No início do século XX descobriu-se que a radiação EM é quantizada. A energia contida num feixe de luz de uma dada frequência não é uma variável contínua, e só pode valer um múltiplo inteiro de um certo quantum básico de energia. Uma onda EM consiste de pequenos aglomerados de energia, que também carregam momento e têm a maioria das propriedades de partículas ordinárias, exceto por sua massa, que é nula. Estes pacotes, ou quanta, de luz são chamados fótons.

A quantização da matéria e da carga elétrica não contradizem nenhum

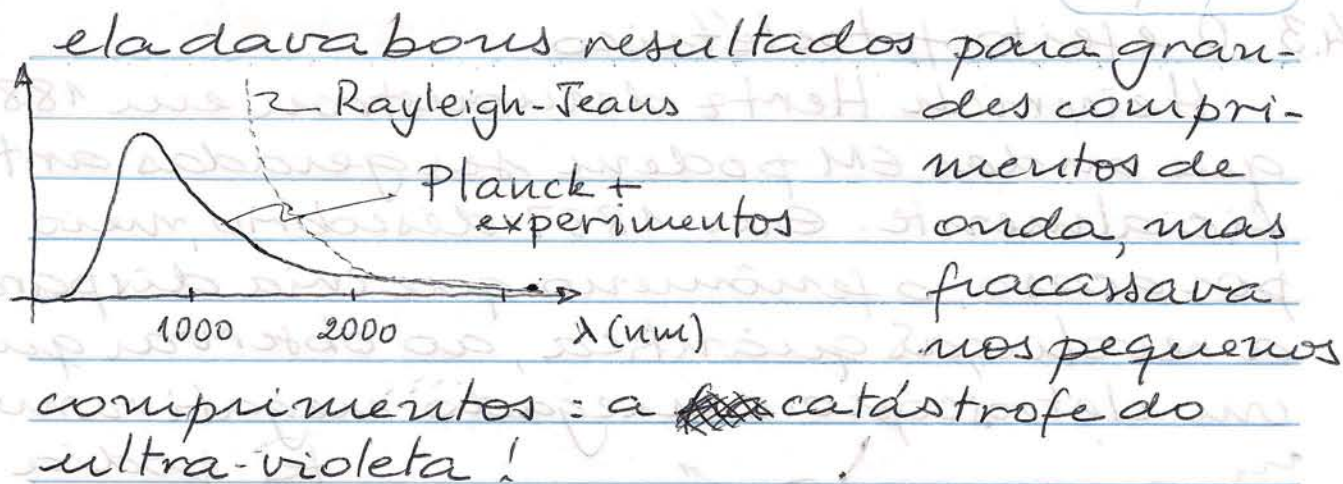
11

princípio básico da física clássica, mas a quantização da radiação é inconsistente com a teoria clássica do EM, que prevê que a energia da radiação de uma dada frequência seja uma variável contínua. A descoberta da quantização da luz provocou o desenvolvimento de uma nova teoria, a teoria quântica da radiação.

4.2 Planck e a radiação de corpo negro

O físico alemão Max Planck foi o primeiro a propor, em 1900, que a radiação EM é quantizada, em decorrência de sua investigação sobre a radiação emitida por um corpo negro. Este é um objeto que absorve toda a radiação sobre ele incidente, e chamamos radiação de corpo negro a radiação emitida por tal objeto quando aquecido.

Por cerca de 40 anos este tema tinha sido investigado, na tentativa de encontrar de que maneira a energia se distribuiria em função do comprimento de onda da radiação. Os nomes dos físicos Wilhelm Wien e Lord Rayleigh estão ligados a esta pesquisa. Em 1900 este último propôs uma fórmula, baseada no EM e mecânica estatística clássicos. Conhecida como fórmula de Rayleigh-Jeans,



Planck conseguiu encontrar uma fórmula que se ajustou perfeitamente aos dados experimentais pela escolha adequada de um parâmetro, chamado a constante de Planck (h). Sua hipótese central, que ele não justificava, era a de que a radiação emitida por um corpo era quantizada: radiação de frequência f só pode ser emitida em quantidades múltiplas de um quantum hf ,

$$E = 0, hf, 2hf, 3hf, \dots$$

O valor de h é

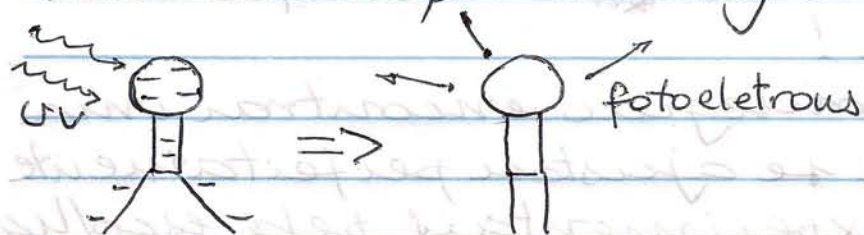
$$h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s} \quad (\text{note a unidade})$$

$$= 4,14 \times 10^{-15} \text{ eV}\cdot\text{s}$$

A descoberta de Planck marca o nascimento da teoria quântica, que revolucionou a física e a química e gerou produtos tecnológicos que são parte importante do modo de vida moderno (transistor, rádio, TV, raios-X, diagnóstico por ressonância magnética, computadores).

4.3 O efeito fotoelétrico

Heinrich Hertz demonstrou em 1886 que ondas EM podem ser geradas artificialmente. Em 1887 descobriu, meio por acaso, o fenômeno que iria disparar a revolução quântica, ao observar que um eletroscópio carregado negativamente podia

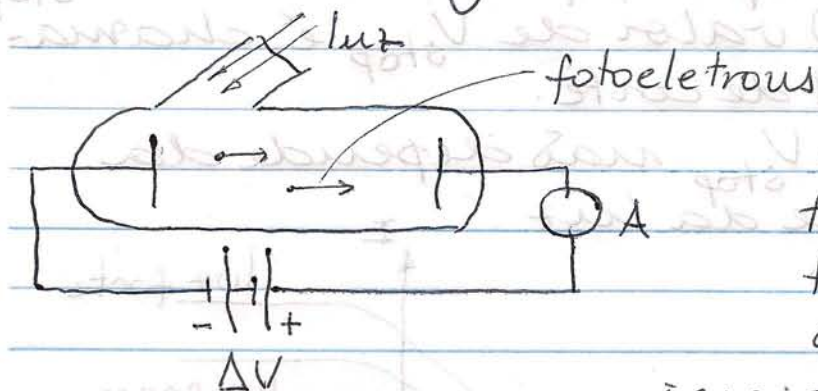


ser descarregado por um feixe UV.

J.J. Thomson inferiu que a luz UV estava de alguma maneira fazendo com que o eletroscópio emitisse cargas negativas. Em 1899 mostrou que a razão e/m destas partículas era ~~era~~ igual a do elétron. A emissão de elétrons por uma superfície, provocada pela incidência de radiação EM, é chamada de efeito foto-elétrico, e os elétrons emitidos de fotoelétrons. Este processo, que é a base de alguns dispositivos modernos de detecção de luz, parece, à primeira vista, consistente com o EM clássico. Ondas luminosas transportam energia em seus campos elétrico e magnético oscilantes, e parece perfeitamente razoável que alguns elétrons do metal possam absorver energia suficiente para serem ejetados. No entanto, investigações mais

detalhada mostram características incompatíveis com a teoria clássica.

O aparelho usado por Phillip Lennard, aluno de Hertz, nesta pesquisa é mostrado no diagrama abaixo.



Lennard encontrou uma corrente contínua quando fazia incidir feixe UV.

Não havia corrente no escuro, logo os eletrons não são espontaneamente ejetados do catodo. Lennard usou uma bateria que produzia uma tensão ΔV ajustável entre os 2 eletrodos, e estudou como a corrente se comporta quando ΔV , a frequência e a intensidade da radiação eram variados.

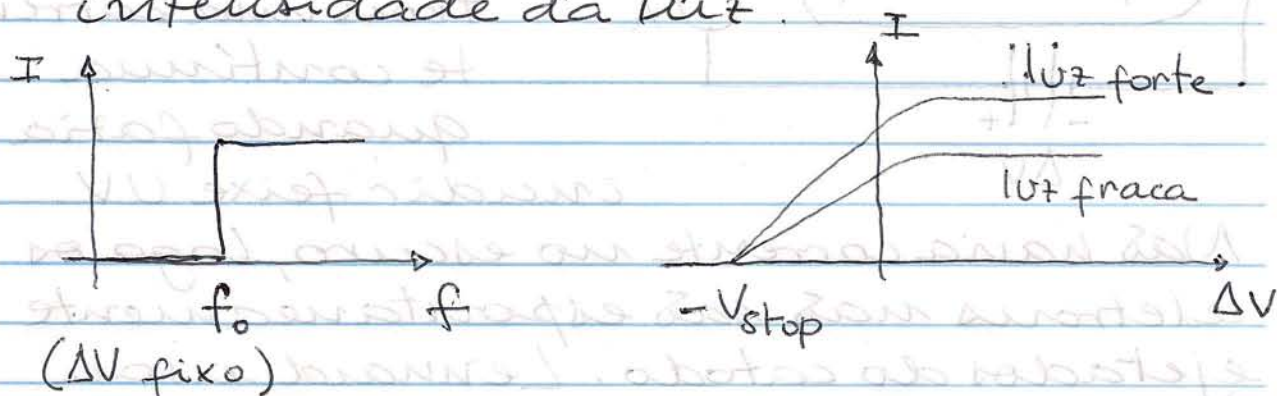
Seus resultados indicaram que:

- 1 - a corrente I é diretamente proporcional à intensidade da luz
- 2 - a corrente aparece assim que o feixe de luz é "ligado" - o atraso é menor que 1 ns (medida moderna)
- 3 - fotoeletrons só são emitidos se a frequência da luz incidente f for maior que uma frequência de limiar f_0 .

4. O valor de f_0 depende do metal de que o catodo é feito.

5. Se ΔV é positivo, a corrente não depende de ΔV . Se ΔV é negativo - potencial retardador, a corrente decresce até que, quando $\Delta V = -V_{\text{stop}}$ ela cessa. O valor de V_{stop} é chamado potencial de corte.

6. O valor de V_{stop} não depende da intensidade da luz.



A mera existência do efeito foto-elétrico não contradiz a física clássica:

- a emissão térmica de elétrons por metal aquecido pode ser explicada classicamente - ver acima.

- a existência de um limiar de energia abaixo do qual não há emissão ^{térmica} de elétrons é fácil de compreender: é necessário realizar trabalho sobre o elétron para libertá-lo do metal. O valor mínimo deste trabalho é chamado função trabalho ϕ e depende do metal.

- quando aquecemos um metal, au-

mentamos a energia térmica de seus elétrons. Se a temperatura for suficientemente alta, a energia cinética de uma fração destes elétrons pode superar a função trabalho, e alguns destes são ejetados. Na prática, a emissão térmica de elétrons requer $T > 1500^\circ\text{C}$, e apenas alguns poucos elementos, como o tungstênio, podem suportar este processo significativamente antes que o metal derreta.

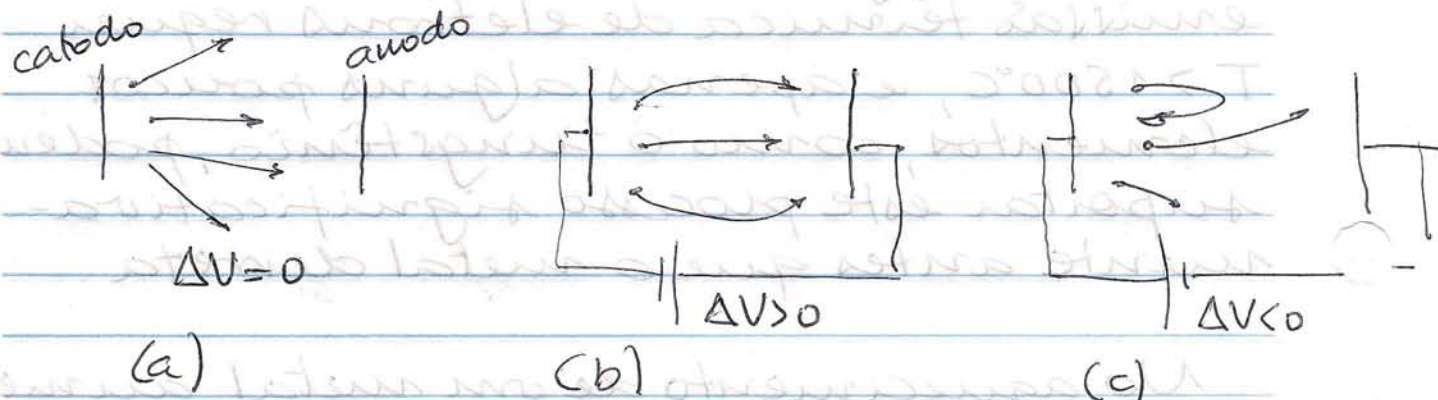
No aquecimento de um metal, aumentamos a temperatura tanto de seus elétrons de condução como de sua rede cristalina de íons positivos, que tem massa muito maior. Seria concebível que um processo como a incidência de luz sobre a superfície aumentasse estas temperaturas de forma diferenciada, primeiro a dos elétrons de condução, diretamente afetados pela absorção da energia da onda EM, depois a da rede por colisões com os elétrons. Com isto, a emissão de fotoelétrons poderia ocorrer sem derretimento do metal.

Os fotoelétrons são ejetados do cátodo com alguma energia cinética: se eles têm energia E no interior do metal.

e gastam ΔE para escapar, ficam com $K = E - \Delta E$; como $\Delta E \geq \phi$

$$\Rightarrow K \leq K_{\max} = E - \phi$$

Eles se movem em todas as direções. Alguns alcançam o anodo, criando uma corrente mensurável, outros não.



- se o anodo é positivo, acaba por atrair todos os fotoelétrons; depois disso, aumento de ΔV não causa aumento em I
- um anodo negativo repele os elétrons; apenas fotoelétrons que deixam o catodo com suficiente energia cinética conseguem chegar ao anodo, tendo perdido energia $-e\Delta V$. Quando ΔV alcança o potencial de corte, até os fotoelétrons mais rápidos são freados e a corrente se anula.

O comportamento dos fotoelétrons pode ser analisado com a conservação da energia. Um elétron ejetado do catodo com energia cinética K_i alcança o anodo, a um potencial ΔV relativo ao catodo, com energia cinética K_f . A energia potencial varia de

do elétron neste processo é $\Delta U = -e\Delta V$:

$$\Delta K + \Delta U = 0 \Rightarrow K_f - K_i - e\Delta V = 0$$

$\Downarrow$

$$K_f = K_i + e\Delta V$$

O elétron acelera se $\Delta V > 0$, e perde velocidade se $\Delta V < 0$ - mas ainda alcançará o anodo enquanto K_i for suficientemente grande. Um elétron com energia cinética inicial K_i chega ao anodo em repouso se ($K_f = 0 \Rightarrow$) $\Delta V = -\frac{K_i}{e}$. A diferença de potencial que consegue frear até o repouso mesmo os fotoelétrons mais rápidos, aqueles com $K_i = K_{\max}$, é

$\Delta V = -\frac{K_{\max}}{e}$; logo, o potencial de corte é

$V_{\text{stop}} = \frac{K_{\max}}{e}$, e sua medida nos dá $K_{\max}$.

Esta explicação clássica dá conta das propriedades 1 e 5 acima. Mas nela nada há que sugira a existência de uma frequência de corte, nem o fato da corrente se iniciar instantaneamente, independentemente da intensidade do feixe luminoso. Além disso, um feixe mais intenso deveria aquecer mais os elétrons, aumentando sua energia cinética máxima e o valor de V_{stop} , o que é contrariado pela observação 6.

A explicação de Einstein

Inspirado pela descoberta de Planck, Einstein sugere que a radiação eletromagnética seja ela mesma quantizada.

Isto é, a luz não é em realidade uma onda contínua; ela chega em pequenos aglomerados, ou pacotes, de energia.

Einstein chamou cada pacote de um quantum de luz, e postulou que sua energia fosse diretamente proporcional à frequência da luz:

$$E = hf$$

(analogia com gotas de chuva numa tempestade)

Os postulados de Einstein

sobre os quanta de luz e sua interação com a matéria

1. Luz de frequência f consiste de quanta discretos, cada um com energia $E = hf$. Cada foton viaja no vácuo com a velocidade da luz c .
2. Quantum de luz é emitido ou absorvido como um todo, nunca em partes.
3. Quantum de luz, quando absorvido por um metal, entrega toda a sua energia para um único elétron.

Vamos aplicá-los ao efeito fotoelétrico.

Um feixe de luz incidente sobre o metal é uma torrente de quanta de luz,

cada um com energia hf , cada um absorvido por um elétron, dando-lhe esta energia. Consequências deste modelo:

1. Um elétron que absorve quantum de luz fica com energia $E_{\text{elétron}} = hf$ (sua energia térmica à temperatura ambiente é tão menor que esta que pode ser desprezada). Ele pode escapar do metal e se tornar um fotoelétron se $E_{\text{elétron}} = hf \geq \phi$ (função trabalho)

Logo, existe uma frequência de corte $f_0 = \frac{\phi}{h}$ abaixo da qual este processo não mais é possível. E mesmo

luz (com $f \geq f_0$) de intensidade muito baixa consegue dar a alguns (poucos, talvez) elétrons energia suficiente, já que toda a energia de um quantum de luz é entregue a um único elétron.

Metais com função trabalho alta (Fe, Cu, Au) exibem efeito fotoelétrico quando iluminados por radiações UV de alta frequência. Fotoemissão com luz visível, de mais baixa frequência, ocorre com metais de função trabalho menor (Na, K).

2. Luz mais intensa está associada a um número maior de quanta de luz, ejetando portanto mais elétrons e produzindo maior corrente, como observado.

3. Os fotoelétrons têm energia cinética distribuída numa faixa de valores, porque cada um requer energia diferente para escapar do metal, mas sua energia cinética máxima é

$$K_{\text{max}} = E - \phi = hf - \phi$$

Como já mencionado, o potencial de corte é uma medida de K_{max} . A teoria de Einstein prevê

$$V_{\text{stop}} = \frac{K_{\text{max}}}{e} = \frac{hf - \phi}{e},$$

que não depende da intensidade da luz e é uma função linear da frequência da radiação incidente.

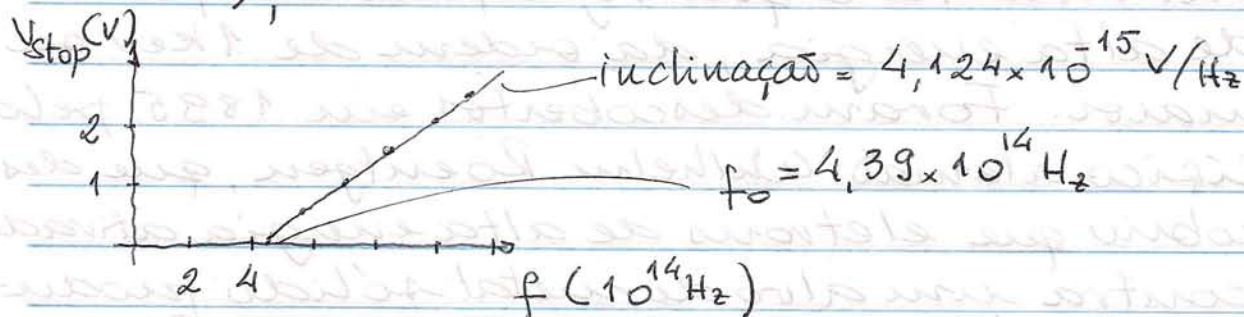
4. Como cada quantum de luz transmite toda sua energia hf para um único elétron, este tem imediatamente energia suficiente para escapar do metal (se $f \geq f_0$) $\Rightarrow$ a corrente começa instantaneamente.

As hipóteses de Einstein explicam portanto todas as observações de Lenard, e ainda fazem uma previsão a respeito da dependência do potencial de corte com a frequência. Em termos da frequência de corte f_0 ,

$$V_{\text{stop}} = \frac{h}{e} (f - f_0)$$

A experiência foi feita por Robert Millikan, responsável pela medida da

carga do elétron, em 1916 (catodo de cério),



que confirmou a dependência linear e obteve um valor de h (como?) consistente com o encontrado por Planck.

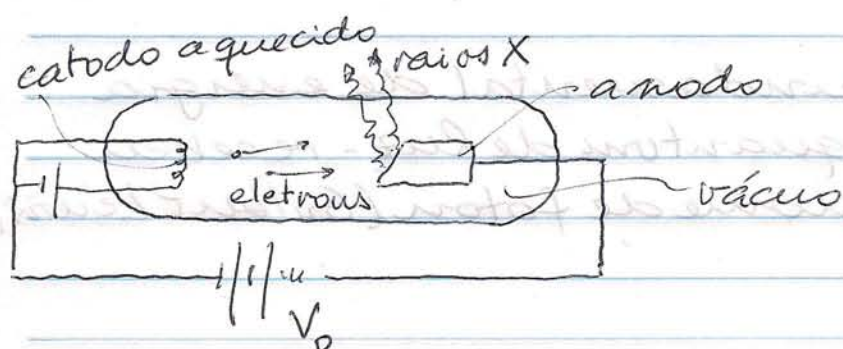
A unidade fundamental de energia luminosa - o quantum de luz - recebeu mais tarde o nome de fóton (Gilbert Lewis, 1926)

4.4 Raios X e difração de Bragg

O evento decisivo que levou à aceitação de que a luz era quantizada e de que o quantum de luz deveria ser reconhecido como uma partícula foi o experimento feito em 1923 pelo americano Arthur Compton, em que foi demonstrado que o fóton possui momento e energia, sujeitos às leis de conservação típicas para partículas (efeito Compton). Esta experiência usa fótons de raios X, que passamos a descrever.

Raios X são radiações EM com comprimento de onda entre 1 e $0,001 \text{ nm}$, ~~ou~~

no mínimo 500 vezes menor que o da luz visível - o que significa um fóton de alta energia, da ordem de 1 keV ou maior. Foram descobertos em 1895 pelo físico alemão Wilhelm Roentgen, que descobriu que elétrons de alta energia ativados contra um alvo de metal sólido produzem radiação muito penetrante. Por não conseguir identificá-la, chamou-a de "raios X".



A figura mostra o diagrama de um tubo de raios X moderno para aplicações de medicina diagnóstica. Uma diferença de potencial V_0 de vários milhares de Volts entre catodo e anodo acelera os elétrons ejetados por emissão térmica.

Recebem energia cinética e vários keV - e portanto velocidade $\sim 0,1c$ ou maior.

Raios X são emitidos quando os elétrons colidem com o anodo e são freiados bruscamente. A inclinação do anodo favorece a emissão de raios X em direção $\sim 90^\circ$ com a do movimento dos elétrons.

A facilidade com que os raios X penetram (atravessam) sólidos de baixa

Exemplos

1. Energia de um quantum de luz

Se $\lambda = 500 \text{ nm}$, (luz visível)

$$f = \frac{v}{\lambda} = \frac{c}{\lambda} = \frac{3.00 \times 10^8}{500 \times 10^{-9}} = 6.00 \times 10^{14} \text{ Hz}$$

$$E = hf = 6.63 \times 10^{-34} \times 6 \times 10^{14} = 3.98 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$4.14 \times 10^{-15} \text{ eV} = 2.49 \text{ eV}$$

(ou $E = hc/\lambda = 1240 \text{ eV nm}/\lambda$)

2. Frequência de corte no efeito fotoelétrico

Na $\phi = 2.75 \text{ eV}$

Al 4.28 eV

 $\Downarrow$

$$f_0 = \frac{\phi}{h} = \frac{\phi}{4.14 \times 10^{-15}} = 6.64 \times 10^{14} \text{ Hz (Na)}$$

$$10.34 \times 10^{14} \text{ Hz (Al)}$$

Convertendo em comprimento de onda,

$$\lambda = \frac{c}{f} = 452 \text{ nm (Na)}$$

$$290 \text{ nm (Al)}$$

3. Velocidade máxima de fotoeltron de sódio iluminado por
- $\lambda = 300 \text{ nm}$

$$f = \frac{c}{\lambda} = 1.00 \times 10^{15} \text{ Hz}$$

$$hf = 4.14 \times 10^{-15} \times 10^{15} = 4.14 \text{ eV}$$

$$K_{\text{max}} = hf - \phi = 4.14 - 2.75 = 1.39 \text{ eV}$$

$$= 2.22 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$v_{\text{max}} = \sqrt{\frac{2 K_{\text{max}}}{m}} = 6.99 \times 10^5 \text{ m/s}$$

- 4.
- $\phi_A = 3.0 \text{ eV}$
- ;
- $\phi_B = 4.0 \text{ eV}$
- ;
- $\phi_C = 5.0 \text{ eV}$

luz UV via fotoeltrons nos 3; ordene

decrescentemente os potenciais de corte para A, B e C

5. Olhe para a lua; a intensidade desta luz é $I \approx 3 \times 10^{-4} \text{ W/m}^2$ (no visível).

Tomando o diâmetro da pupila $\approx 6 \text{ mm}$, sua área é $A \approx 3 \times 10^{-5} \text{ m}^2$.

O número de fotons que entra na pupila (por segundo) é

$$n = \frac{IA}{hf} = \frac{3 \times 10^{-4} \times 3 \times 10^{-5}}{2,5 \times 1,6 \times 10^{-19}} \approx 2,2 \times 10^{10}$$

6. $\phi_{\text{Ag}} = 4,7 \text{ eV}$. Qual o potencial de corte para fotoeletrons produzidos por "luz" UV de $\lambda = 200 \text{ nm}$?

$$E_{\text{foton}} = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240}{200} = 6,2 \text{ eV}$$

$$V_{\text{stop}} = \frac{K_{\text{max}}}{e} = \frac{hf - \phi}{e} = 6,2 - 4,7 = 1,5 \text{ V}$$

7. Aumenta-se a intensidade do feixe luminoso sem mudar sua frequência. Assinale a afirmativa verdadeira:

- (a) os fotons vão andar mais depressa
- (b) cada foton terá mais energia
- (c) cada foton será maior
- (d) haverá ejeção de mais fotons por segundo

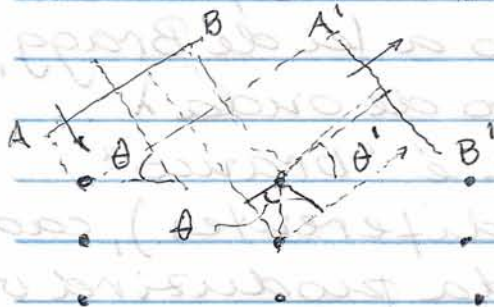
densidade foi posta à serviço da medicina poucos meses depois de sua descoberta, mas o problema de identificar o que era de fato esta radiação levou mais tempo para ser resolvido. Já era sabido que cargas elétricas aceleradas produzem ondas EM, assim como cargas oscilantes numa antena de rádio geram radiação de grande comprimento de onda, que chamamos ondas de rádio. Era, portanto, perfeitamente razoável supor que os raios X fossem ondas EM produzidas pela enorme (des)aceleração sofrida pelos elétrons freiados no anodo (radiação chamada de bremsstrahlung, alemão para "radiação de frenagem"). O problema era verificar que os raios X eram de fato ondas, dificuldade provocada por seu minúsculo comprimento de onda.

Uma das maneiras mais efetivas para evidenciar o comportamento ondulatório é através do uso de uma rede de difração, observando o padrão de interferência gerado. Para uma rede ser eficaz, a separação entre os elementos espalhadores deve ser regular e ser da mesma ordem de grandeza que o comprimento de onda. Uma boa rede para a luz visível ~~deve~~ deve ter portanto

um espaçamento da ordem de 1000 nm , mas para evidenciar a natureza oscilatória dos raios X este espaçamento deve ser da ordem de $0,1 \text{ nm}$, o que não é fácil de se conseguir. Em 1912, o físico alemão Max von Laue sugeriu o uso de um cristal para isto, já que os átomos estão, neste caso, regularmente espaçados por distâncias desta ordem de grandeza. Com esta técnica conseguiu evidenciar que os raios X são ondas EM.

O uso de cristais como redes de difração para raios X foi desenvolvido pelos físicos ingleses W. L. Bragg e seu pai, W. H. Bragg e é usualmente chamado de difração (ou espalhamento, ou reflexão) de Bragg. Esta técnica teve importância histórica no estudo dos raios X e é ainda mais importante hoje no estudo de estruturas cristalinas. Para entender a análise de Bragg devemos primeiro notar que podemos pensar num cristal como composto por um grande número de planos paralelos idênticos e regularmente espaçados, cada um contendo um grande número de átomos igualmente espaçados. Estes planos cristalinos podem ser escolhidos de diferentes maneiras - ver figura.

Consideremos onda EM incidente sobre um cristal - na difração de Bragg definimos o ângulo de incidência de forma diferente da ótica.



Cada átomo da rede vai espalhar a radiação incidente, e vamos observar máximos (de difração) nas direções em que as ondas espalhadas estiverem em fase (i.e., percorrem o mesmo caminho ótico) $\Rightarrow \theta' = \theta$.

Consideremos agora o espalhamento por átomos em 2 planos adjacentes, separados por distância d . A diferença de percursos será $2d \sin \theta$, e teremos máximo quando

$$2d \sin \theta = n \lambda$$

lei de Bragg
 $\rightarrow$ inteiro

Em muitas aplicações apenas o 1º máximo ($n=1$) é importante.

Aplicações:

- O espaçamento d entre os planos é conhecido (pode ser calculado) para muitos cristais simples, a partir de sua densidade e da massa de seus átomos; se fizermos incidir sobre este cristal um feixe monocromático

co de raios X, a figura de difração resultante pode ser usada para determinar, usando a lei de Bragg, ~~para~~ o comprimento de onda λ .

- se o feixe incidente é "branco" (contém muitos λ s diferentes), cada comprimento de onda produzirá um máximo de difração numa direção diferente, e podemos usar o cristal como um espectrômetro de raios X, para determinar quais comprimentos de onda estão presentes e qual sua intensidade.

- uma vez conhecido o λ de um feixe de raios X, podemos usar a difração de Bragg para investigar estruturas cristalinas desconhecidas, ~~ou seja~~ técnica conhecida como cristalografia por raios X e ~~é~~ uma importante ferramenta (de caracterização de materiais) em física do estado sólido e biofísica molecular. Exemplo: determinação da estrutura molecular do DNA (Watson e Crick).

4.5 Espectros de raios X

Com o uso do espectrômetro de raios X podemos determinar experimentalmente a distribuição da intensidade em função do comprimento ~~dos raios X~~ de onda nos raios emitidos por um tubo

tilibra

(ou frequência)

de raios X. A teoria clássica do bremsstrahlung prevê uma distribuição suave com espectro largo e intensidade indo a zero suavemente para grandes frequências. Os espectros observados contradizem esta previsão em 2 aspectos:



- apresentam um ou mais picos superpostos a um fundo suave - indicando que faixas apreciáveis da radiação é produzida em certas frequências isoladas, características do metal de que é feito o anodo - são chamados raios X característicos, cuja ocorrência não tem explicação clássica e são, na verdade, consequência da quantização dos níveis de energia atômicos
- todos terminam abruptamente numa frequência máxima $f_{\max}$, que é independente do metal do anodo. Este fenômeno, que também não tem explicação clássica, pode ser facilmente compreendido se

reconhecemos que (i) os raios X são quantizados e seus quanta têm energia hf ; e (ii) cada quantum recebe energia de um dos elétrons incidentes sobre o anodo do tubo de raios X. Estes elétrons têm energia cinética $K = V_0 e$, onde V_0 é o potencial acelerador do tubo. Como a energia máxima que cada elétron pode ceder é K , nenhum fóton de raio X pode ter energia hf maior que K :

$$hf_{\max} = K = V_0 e \Rightarrow f_{\max} = \frac{V_0 e}{h}$$

(lei de Duane-Hunt), o que permite novo valor experimental para h , que resulta ser o mesmo que o obtido em outras experiências - o que é forte evidência a favor do princípio fundamental da hipótese quântica.

4.6 Efeito Compton

Quando um feixe luminoso incide sobre um sistema de cargas, como um átomo ou mesmo um único elétron, parte do feixe é espalhado em várias direções. A teoria clássica deste espalhamento repousa sobre uma ideia simples: o campo elétrico oscilatório da radiação provoca um movimento oscilatório nas

cargas que, por isso, irradiam ondas (secundárias) em várias direções. A distribuição angular destas ondas espalhadas depende de detalhes do arranjo das cargas do alvo, mas sua frequência f : ela deve ser igual à frequência das oscilações das cargas, que por sua vez deve ser a mesma que a frequência f_0 da radiação incidente,

$$f = f_0$$

Várias experiências feitas com luz visível parecem confirmar esta previsão. Mas...

A partir de 1912 começam a aparecer relatos nos quais raios X de alta frequência espalhados por elétrons exibiam $f < f_0$. Em 1923 o físico americano Arthur Compton mostrou que, se a luz é quantizada, deve-se esperar que $f < f_0$, ao contrário do previsto pela teoria clássica.

Sua ideia: se os fótons têm energia, devem também ter momento - como vimos no cap. 2, para uma partícula de massa zero temos

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2 = (pc)^2$$

||

$$E = pc \Rightarrow p = \frac{E}{c} = \frac{hf}{c} = \frac{h}{\lambda}$$

No espalhamento por elétrons, cada

111
foton espalhado resulta da colisão com um único elétron, na qual valem as leis de conservação de momento e energia.

Esta hipótese explica imediatamente o desvio da frequência do raio X espalhado - quando um foton de frequência f_0 colide com um elétron livre parado, este deve recuar - ganha, portanto, parte da energia original do foton. Portanto, a energia final do foton (hf) deve ser menor que a energia hf_0 do foton incidente:

$$f < f_0$$

Compton usou as leis de conservação para determinar a frequência f do foton espalhado em função do ângulo de espalhamento dos raios X (θ).

Comentário: os elétrons do alvo usado por Compton não estavam, de fato, parados - ele usou elétrons de átomos de um bloco de carbono (grafite), que se movem em suas órbitas atômicas e não estão livres, já que estão sob a ação de forças que os ligam aos átomos. Mas a energia cinética dos elétrons mais externos de um átomo é da ordem de alguns eV, enquanto

os fotons dos raios X tem energia da ordem de

$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{0.1 \text{ nm}} \approx 10^4 \text{ eV}$$

Portanto, a energia cinética e a energia de ligação dos eletrons mais externos são desprezíveis, e podemos tratá-los como livres e em repouso.

Considere a colisão



Pela conservação de energia e momento, (relativísticos)

$$\left. \begin{aligned} E_e + E &= mc^2 + E_0, & E_0 &= p_0 c \\ \vec{p}_e + \vec{p} &= \vec{p}_0, & E &= pc \end{aligned} \right\}$$

Começamos por eliminar E_e e $\vec{p}_e$ destas equações:

$$E_e = mc^2 + E_0 - E$$

$$\Rightarrow (\vec{p}_e^2 c^2 + m^2 c^4)^{1/2} = mc^2 + p_0 c - pc$$

$$[\vec{p}_e^2 + (mc)^2]^{1/2} = mc + p_0 - p$$

$$\begin{aligned} p_e^2 &= \vec{p}_e \cdot \vec{p}_e = (\vec{p}_0 - \vec{p}) \cdot (\vec{p}_0 - \vec{p}) = \\ &= p_0^2 + p^2 - 2 \vec{p}_0 \cdot \vec{p}, \text{ ou} \end{aligned}$$

$$p_e^2 = p_0^2 + p^2 - 2p_0 p \cos \theta$$

devando na equação de energia,

$$\sqrt{p_0^2 + p^2 - 2p_0 p \cos \theta} + mc = mc + p_0 - p$$

$$p_0^2 + p^2 - 2p_0 p \cos \theta + (mc)^2 = (mc)^2 + p_0^2 + p^2 + 2mc p_0 - 2mc p - 2p_0 p$$

$$mc(p_0 - p) = p_0 p (1 - \cos \theta), \text{ ou}$$

$$mc \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p_0} \right) = 1 - \cos \theta$$

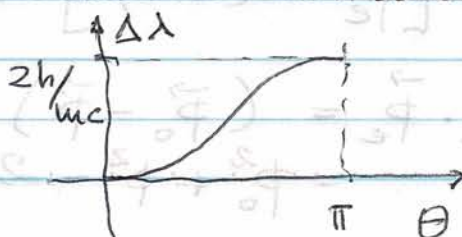
$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p_0} = \frac{1}{mc} (1 - \cos \theta)$$

de onde podemos obter o momento do foton espalhado (p) e daí sua energia ($E = pc$), sua frequência ($f = \frac{E}{h}$) ou seu comprimento de onda^u ($\lambda = \frac{c}{f} = \frac{hc}{E} = \frac{h}{p}$)

$$\Delta \lambda \equiv \lambda - \lambda_0 = \frac{h}{mc} (1 - \cos \theta)$$

Como $\Delta \lambda \geq 0$, o comprimento de onda do foton espalhado é maior que o do foton incidente $\Rightarrow f \leq f_0$.

O desvio em λ , $\Delta \lambda$, é zero se $\theta = 0$ e aumenta com θ até o máximo $\frac{2h}{mc}$ quando $\theta = \pi$:



O tamanho deste desvio é determinado pela quantidade

$$\frac{h}{mc} = \frac{hc}{mc^2} = \frac{1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}}{511 \text{ keV}} = 0,00243 \text{ nm}$$

(também chamado de comprimento de onda de Compton para o elétron).

Dois comentários finais sobre a fórmula de Compton e seus resultados experimentais:

(i) $\Delta\lambda$ é independente de λ_0 ; logo, deveríamos ver o mesmo desvio para a luz visível. Isto não acontece, no entanto: como o comprimento de onda da luz visível é ~ 5000 vezes maior que o dos raios X, $\Delta\lambda$ é 5000 vezes menor e é, na prática, impossível de observar.

Além disso, neste caso o elétron-alvo não pode ser considerado estacionário, já que sua energia ($\sim \text{eV}$) é da mesma ordem de grandeza que a energia do fóton incidente.

(ii) Compton observou que, dado um ângulo θ , parte dos raios X espalhados têm $\lambda \approx \lambda_0$. A explicação qualitativa deste fato é simples, e se deve à interação do fóton incidente com elétron interno ao átomo ou com o núcleo. Neste caso, não há ejeção do elétron e o átomo inteiro sofre o recuo. Neste caso, devemos tratar o processo como uma interação entre o fóton e o átomo.

77
todo, substituindo a massa que aparece na fórmula pela massa do átomo (e não apenas a do elétron, o que implica num $\Delta\lambda \sim 20000$ vezes menor (no caso do C), e o desvio aparenta ser nulo.

4.7 Dualidade onda-partícula

Aceitamos hoje que o efeito fotoelétrico, o efeito Compton e inúmeras outras experiências demonstram inequivocamente o caráter granular (de partícula) da luz, cuja natureza ondulatória é também evidenciada por outro conjunto de experiências (interferência, difração). A luz exibe, portanto, propriedades de onda e propriedades de partícula. Os 2 aspectos estão misturados nas equações básicas

$$E = hf \quad \text{e} \quad p = \frac{h}{\lambda}$$

Vamos ver (no Cap. 6) que partículas ordinárias, como o elétron e o próton, também exibem esta dualidade onda-partícula, e a primeira tarefa da teoria quântica é reconciliar estes aspectos aparentemente contraditórios. Vai resultar que a teoria quântica destas partículas é mais simples, porque elas se movem com velocidades não relativísticas.